

Kombinatorika in verjetnostni račun

- Kombinatorika
- Verjetnosti račun

1. V domu ostarelih občanov je 250 oskrbovancev. 16 % je starih od 50 do 60 let. Med 60 in 70 leti je 80 oskrbovancev, med 70 in 80 leti pa 100 starostnikov. Drugi so stari med 80 in 90 let.

1.1. Iz grupiranih podatkov izračunajte povprečno starost oskrbovancev tega doma.

(5 točk)

1.2. Izračunajte standardni odklon starosti.

(5 točk)

1.3. Grafično ponazorite starost oskrbovancev.

(5 točk)

2. Na strelskem tekmovanju je sodelovalo 50 strelcev. Izidi po prvem poskusu so napisani v preglednici:

Zadetki (točke)	Število strelcev
10	10
8	8
7	20
6	4
4	2
0	6

2.1. Izračunajte povprečno število točk v tem poskusu.

(5 točk)

2.2. Koliko strelcev je doseglo podpovprečni izid? Izračunajte odstotek strelcev, ki so dosegli nadpovprečni izid.

(5 točk)

2.3. Izračunajte standardni odklon dosežkov v tem poskusu.

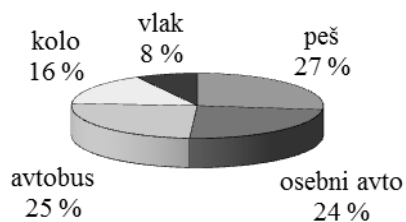
(5 točk)

3. Blaž bo za domače branje prebral 5 različnih knjig. Vrstni red, v katerem bo prebral knjige, bo izbral sam. Izračunajte število različnih vrstnih redov, ki jih lahko izbere. Izračunajte število različnih vrstnih redov, če bo Blaž najprej prebral najdebelejšo knjigo.

(4 točke)

4. Diagram prikazuje načine prihoda dijakov v šolo.

Načini prihoda dijakov v šolo



- 4.1. Izračunajte in v preglednico zapišite število dijakov glede na način prihoda v šolo, če vemo, da se jih z avtobusom pripelje 125. Izračunajte število vseh dijakov na šoli.

(6 točk)

Način prihoda	Peš	Vlak	Kolo	Avtobus	Osebni avto
Število dijakov					

- 4.2. Izračunajte in v preglednico zapišite velikosti središčnih kotov v kotnih stopinjah.

(6 točk)

Način prihoda	Peš	Vlak	Kolo	Avtobus	Osebni avto
Velikost pripadajočega središčnega kota v stopinjah					

- 4.3. Izračunajte verjetnost, da slučajno izbrani dijak v šolo ni prišel peš.

(3 točke)

5. Mateja je prišla na nedeljsko kosilo v restavracijo. Pri sestavi kosila je izbirala med 2 juhama, 3 glavnimi jedmi in 2 sladicama. Narišite kombinatorično drevo in zapišite, na koliko različnih načinov je lahko sestavila nedeljsko kosilo.

(5 točk)

6. Pri nakupu novega avtomobila Math lahko kupec izbira med 8 različnimi barvami, 3 različnimi paketi notranje opreme ter med dizelskim in bencinskim motorjem. Med koliko vrstami avtomobila Math lahko izbira kupec?

(4 točke)

7. V preglednici so zapisane plače, ki so jih dobili delavci v nekem podjetju:

Razred	Plače (v EUR)	Absolutne frekvence	Relativne frekvence
1	nad 500 do 600	150	

2	nad 600 do 700	250	
3	nad 700 do 800	200	
4	nad 800 do 900	150	
5	nad 900 do 1000	50	

- 7.1. Dopolnite preglednico z relativnimi frekvencami in izračunajte, koliko odstotkov delavcev zasluži več kot 800 EUR. (6 točk)
- 7.2. Izračunajte povprečno plačo in podatke prikažite s histogramom. (6 točk)
- 7.3. Kolikšna je verjetnost, da je naključno izbrani delavec v petem plačnem razredu? (3 točke)
8. Sestavljamo kodo alarma, ki ima tri mesta. Na vsako mesto lahko postavimo katerokoli številko od 0 do 9. Koliko različnih kod lahko sestavimo, če na tretje mesto postavimo številko 9? (4 točke)
9. Črke A, B, C, D razvrščamo v nize dolžine 3. V nizu se črke ne smejo ponavljati. Izračunajte, koliko različnih nizov lahko dobimo na ta način. Zapišite tiste med njimi, ki se začnejo z B . (4 točke)
10. V šolski košarkaški ekipi je 12 igralcev, vsak izmed njih lahko igra na kateremkoli igralnem mestu. Na koliko načinov lahko trener izbere začetno peterko? (4 točke)
11. V računalniški igrici lahko ustvarite svojega akcijskega junaka, tako da mu določite oblačilo, pokrivalo in vozilo. Izbirate lahko med petimi oblačili, tremi pokrivali in sedmimi vozili. Koliko različnih akcijskih junakov lahko ustvarite? (4 točke)
12. V razredu je 27 dijakov, od tega 10 fantov in 17 deklet.
- 12.1. V šolo se z avtobusom vozi 40 % fantov. Z avtobusom se vozi 5 deklet več kot fantov. Izračunajte, koliko fantov in koliko deklet se vozi v šolo z avtobusom. (4 točke)
- 12.2. Koliko je vseh mogočih izborov razrednega predsednika, tajnika in blagajnika, če lahko vsak zasede katerokoli funkcijo in lahko eden opravlja samo eno funkcijo? (5 točk)
- 12.3. Pri uri matematike pet dijakov ni imelo domače naloge. Za pregled domače naloge je učitelj izbral dva dijaka. Izračunajte verjetnost, da oba izbrana dijaka nista imela domače naloge. (6 točk)

13. V vreči sta 2 beli in 13 modrih kroglic. Izvlečemo dve kroglici hkrati.
- Izračunajte, na koliko načinov lahko izvlečemo dve kroglici.
 - Izračunajte verjetnost, da sta obe izvlečeni kroglici beli.

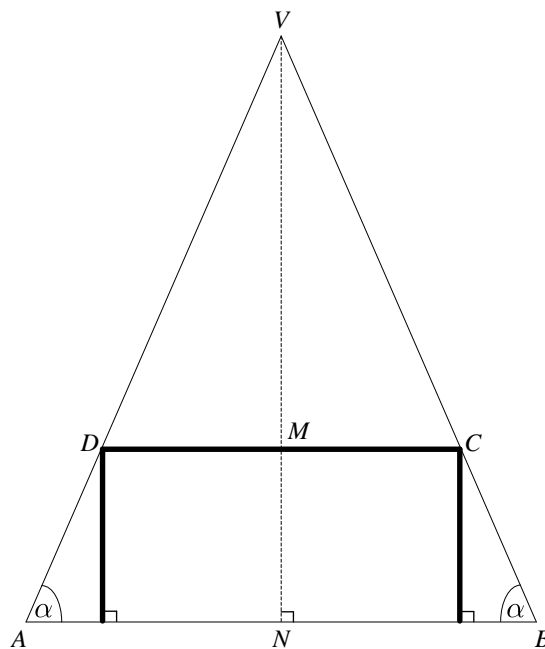
(4 točke)

14. V posodi A je bilo 10 modrih in 5 rumenih kroglic. Iz posode A smo izvlekli eno kroglico. Izračunajte, kolikšna je verjetnost, da je izvlečena kroglica rumena.

V posodi B je bilo 10 rdečih in 5 zelenih kroglic. V posodo B smo dodali nekaj zelenih kroglic in nato iz posode izvlekli eno kroglico. Verjetnost, da je izvlečena kroglica zelena, je enaka $\frac{1}{2}$. Izračunajte, koliko zelenih kroglic smo dodali.

(5 točk)

15. Rob DC kvadratne mize meri 120 cm, višina mize MN pa 80 cm.



- 15.1. Luč v točki V na 240 cm visokem stropu oriše senco mize na tleh, na sliki je prikazan pogled s strani. Izračunajte dolžino sence AB in velikost kota α .

(8 točk)

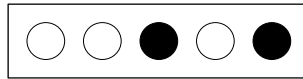
- 15.2. Na mizo položimo okrogel prt s polmerom 20 cm. Izračunajte, največ koliko odstotkov mize lahko prekrijemo s prtom.

(5 točk)

- 15.3. Na mizi stoji pet kozarcev različnih barv. Izračunajte, na koliko načinov lahko izberemo dva kozarca.

(2 točki)

16. Biatlonka Mojca je zadela 3 izmed 5 tarč (glej sliko, zadeta tarča je bela). Izračunajte verjetnost, da je zadela razporeditev zadetih tarč na sliki, če so vse razporeditve zadetih tarč enako verjetne.



(4 točke)

17. V 1. A razredu na neki šoli je 12 fantov in 16 deklet.

17.1. V 1. A razredu na tej šoli je dvakrat toliko deklet kolikor je deklet v 2. A razredu. Razmerje deklet in fantov v 2. A razredu je 2 : 5. Koliko fantov in koliko deklet je v 2. A razredu?

(5 točk)

17.2. Učitelj matematike je v 1. A razredu za spraševanje naključno izbral 3 dijake. Kolikšna je verjetnost, da je izbral dva fanta in eno dekle?

(5 točk)

Rešitev

1. Skupaj 15 točk

1.1. (5 točk)

- Sredine razredov 1 točka
- Izračunani frekvenci..... (1 + 1) 2 točki
- Povprečna starost oskrbovancev: $\bar{x} = \frac{17450}{250} \doteq 69,8$ let (1* + 1) 2 točki

Razred	\bar{x}_i	Število (f_i)	$\bar{x}_i \cdot f_i$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x}_i)^2$	Kot
50 – 60	55	40	2200	8761,6	57,6°
60 – 70	65	80	5200	1843,2	115,2°
70 – 80	75	100	7500	2704,0	144°
80 – 90	85	30	2550	6931,2	43,2°
		250	17450	20240	360°

Opomba: Tabela ni obvezna, ampak je le pomoč ocenjevalcem.

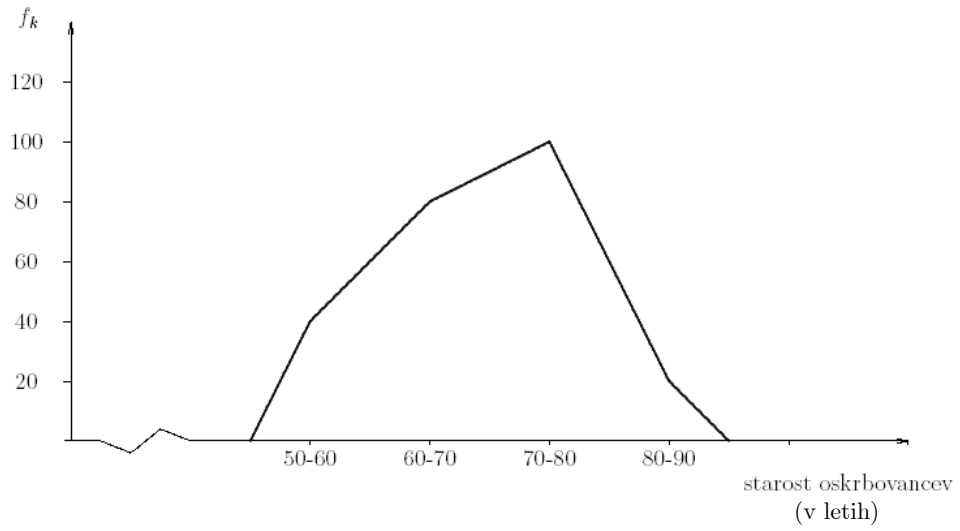
1.2. (5 točk)

- Standardni odklon: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x}_i)^2}{n} = \frac{20240}{250} \doteq 80,96$
 $\sigma \doteq 9,0$ (2* + 3) 5 točk

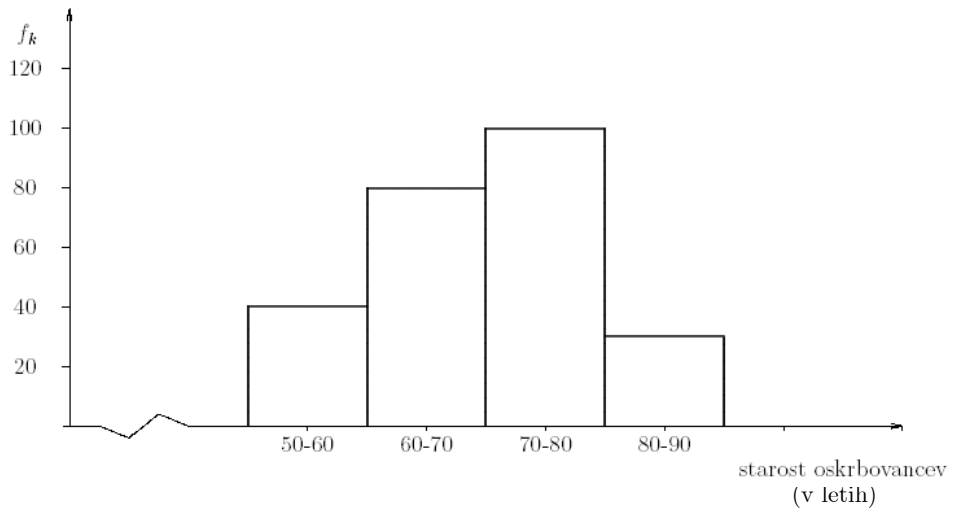
1.3. (5 točk)

- Katerakoli pravilna grafična predstavitev..... 5 točk

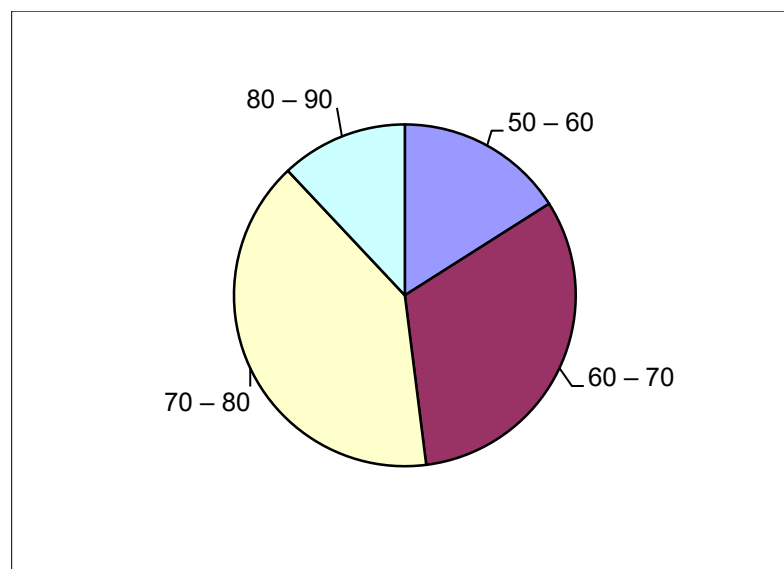
npr.: frekvenčni poligon



histogram



strukturni krog



Rešitev

2. Skupaj 15 točk

2.1. (5 točk)

Zadetki (točke)	Število strelcev	$x_k \cdot f_k$
10	10	100
8	8	64
7	20	140
6	4	24
4	2	8
0	6	0
	50	336

Izračunano povprečno število točk v tem poskusu:

- Števec 2 točki
- Imenovalec 1 točka
- Izračunana vrednost: $\bar{x} = \frac{336}{50} = 6,72$ (1* + 1) 2 točki

2.2. (5 točk)

- Podpovprečni izid je doseglo 12 tekmovalcev. (1* + 1) 2 točki
- Odstotek strelcev z nadpovprečnim rezultatom: 76 % (2* + 1) 3 točke

2.3. (5 točk)

- Uporabljen obrazec in vstavljeni podatki, npr.:

$$\sigma^2 = \frac{10(10 - 6,72)^2 + 8(8 - 6,72)^2 + 20(7 - 6,72)^2 + 4(6 - 6,72)^2 + 2(4 - 6,72)^2 + 6(0 - 6,72)^2}{50}$$

- (1* + 2) 3 točke
- $\sigma^2 \doteq 8,2016$ 1* točka
- $\sigma \doteq 2,86$ 1* točka

Rešitev

3. Skupaj 4 točke

- Uporaba pravilnega postopka za izračun števila vseh različnih vrstnih redov 1 točka
- Rezultat: 120 različnih vrstnih redov 1 točka
- Uporaba pravilnega postopka za izračun števila vseh različnih vrstnih redov 1 točka
- Rezultat: 24 različnih vrstnih redov 1 točka

Rešitev

4. Skupaj 15 točk

4.1. (6 točk)

- Uporaba pravilne strategije za izračun števila vseh dijakov, npr.: $0,25x = 125$ 1 točka
- Izračun števila vseh dijakov: 500 1 točka
- Izračunane absolutne frekvence, razen za prihod z avtobusom: (1 + 1 + 1 + 1) 4 točke

Način prihoda	Peš	Vlak	Kolo	Avtobus	Osebni avto
Število dijakov	135	40	80	125	120

Opomba: Kandidatu se v celoti odšteje ena točka, če absolutne frekvence niso zapisane v preglednico.

4.2. (6 točk)

- Uporaba pravilne strategije za izračun središčnih kotov, npr. za prihod peš: $0,27 \cdot 360^\circ$ 1 točka
- Izračunane velikosti središčnih kotov: (1 + 1 + 1 + 1 + 1) 5 točk

Način prihoda	Peš	Vlak	Kolo	Avtobus	Osebni avto
Velikost pripadajočega središčnega kota v stopinjah	97,2	28,8	57,6	90	86,4

Opomba: Kandidatu se v celoti odšteje ena točka, če velikosti središčnih kotov niso zapisane v preglednico.

Opomba: Kandidat dobi vse točke, če rezultate pravilno zaokroži na cele stopinje.

4.3. (3 točke)

1. način:

- Število dijakov, ki niso prišli v šolo peš, npr.: $500 - 135 = 365$ 1* točka
- Uporaba formule za verjetnost slučajnega dogodka in izračun, npr.: $\frac{365}{500} = 0,73$ (1 + 1) 2 točki

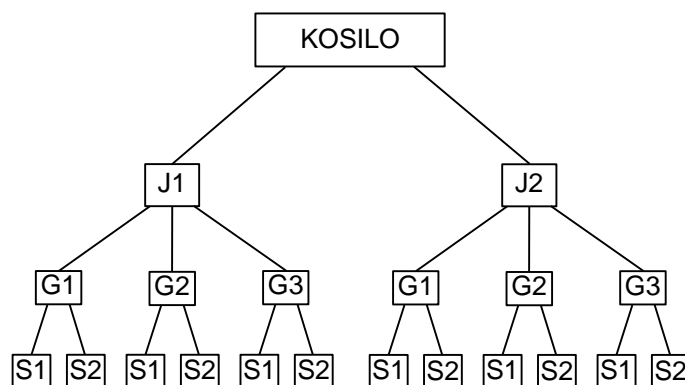
2. način:

- Verjetnost slučajnega dogodka, da je dijak prišel v šolo peš: 0,27 1 točka
- Uporaba formule za verjetnost nasprotnega dogodka in izračun, npr.: $1 - 0,27 = 0,73$ (1* + 1) 2 točki

Rešitev

5. Skupaj 5 točk

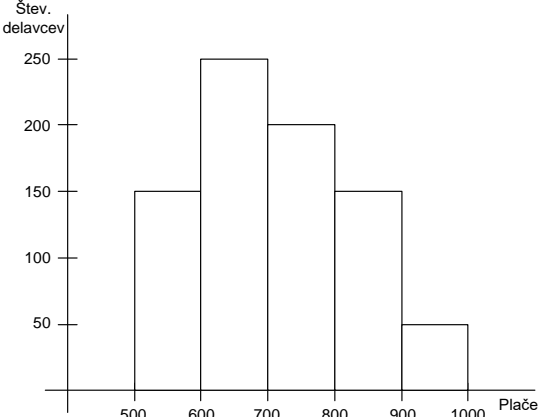
- Narisano kombinatorično drevo, vsak korak izbiranja 1 točka (1 + 1 + 1) 3 točke
- Zapis ali izračun števila načinov, npr.: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ (1 + 1) 2 točki



Rešitev Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
6	1	ena od: ♦ upoštevanje osnovnega izreka kombinatorike ♦ narisano kombinatorično drevo	
	1	ena od: ♦ zapis ali upoštevanje, da je $n = 8 \cdot 3 \cdot 2$	

		♦ pravilno narisano kombinatorično drevo	
	1	♦ rešitev: $n = 48$	
	1	♦ odgovor, npr.: Kupec lahko izbira med 48 vrstami avtomobila Math.	
Skupaj	4		

Rešitev ev Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila																								
7.1	3	♦ pravilno izračunane relativne frekvence	1 + 1 + 1 Kandidat dobi 1 točko, če pravilno izračuna dve relativni frekvenci. Kandidat dobi 2 točki, če pravilno izračuna štiri relativne frekvence. Kandidat lahko zapiše relativne frekvence v odstotkih.																								
		<table border="1"> <thead> <tr> <th>Razred</th> <th>Plače (v EUR)</th> <th>Absolutne frekvence</th> <th>Relativne frekvence</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>nad 500 do 600</td> <td>150</td> <td>0,1875</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>nad 600 do 700</td> <td>250</td> <td>0,3125</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>nad 700 do 800</td> <td>200</td> <td>0,2500</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>nad 800 do 900</td> <td>150</td> <td>0,1875</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>nad 900 do 1000</td> <td>50</td> <td>0,0625</td> </tr> </tbody> </table>		Razred	Plače (v EUR)	Absolutne frekvence	Relativne frekvence	1	nad 500 do 600	150	0,1875	2	nad 600 do 700	250	0,3125	3	nad 700 do 800	200	0,2500	4	nad 800 do 900	150	0,1875	5	nad 900 do 1000	50	0,0625
		Razred		Plače (v EUR)	Absolutne frekvence	Relativne frekvence																					
1	nad 500 do 600	150	0,1875																								
2	nad 600 do 700	250	0,3125																								
3	nad 700 do 800	200	0,2500																								
4	nad 800 do 900	150	0,1875																								
5	nad 900 do 1000	50	0,0625																								
2	♦ izračun, npr.: $x = 0,1875 + 0,0625 = 0,25$	1* + 1																									
	1	♦ rezultat: 25 %																									
Skupaj	6																										

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila																						
7.2	1	♦ izračun sredin razredov																							
	1	♦ izračun ali upoštevanje produkta absolutnih frekvenc in sredine razredov																							
		<table border="1"> <thead> <tr> <th>Razred</th> <th>Plače (v EUR)</th> <th>s_j</th> <th>$f_j \cdot s_j$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>nad 500 do 600</td> <td>550</td> <td>82500</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>nad 600 do 700</td> <td>650</td> <td>162500</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>nad 700 do 800</td> <td>750</td> <td>150000</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>nad 800 do 900</td> <td>850</td> <td>127500</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>nad 900 do 1000</td> <td>950</td> <td>47500</td> </tr> </tbody> </table>	Razred	Plače (v EUR)	s_j	$f_j \cdot s_j$	1	nad 500 do 600	550	82500	2	nad 600 do 700	650	162500	3	nad 700 do 800	750	150000	4	nad 800 do 900	850	127500	5	nad 900 do 1000	950
Razred	Plače (v EUR)	s_j	$f_j \cdot s_j$																						
1	nad 500 do 600	550	82500																						
2	nad 600 do 700	650	162500																						
3	nad 700 do 800	750	150000																						
4	nad 800 do 900	850	127500																						
5	nad 900 do 1000	950	47500																						
	2	♦ izračun povprečne plače, npr.: $\bar{x} = \frac{82500 + 162500 + 150000 + 127500 + 47500}{800} = 712,50 \text{ EUR}$	1* + 1																						
	2	♦ narisano histogram, npr.: 																							

Skupaj	6	
--------	---	--

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
7.3	2	♦ izračun verjetnosti, npr.: $P(A) = \frac{50}{800} = 0,0625$	1 + 1
	1	♦ odgovor, npr.: Verjetnost, da naključno izbrani delavec zasluži od 900 do 1000 EUR, je 0,0625.	
Skupaj	3		

Rešitev Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
8	3	♦ ugotovitev, da je različnih kod: $10 \cdot 10 \cdot 1$	1 + 1 + 1
	1	♦ odgovor, npr.: Sestavimo lahko 100 različnih kod.	
Skupaj	4		

Rešitev Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
9	2	♦ izračun, npr.: $V_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$ različnih nizov	1 + 1
	2	♦ nizi, ki se začnejo z B, so: <i>BAC, BAD, BCA, BCD, BDA, BDC</i> .	1 + 1 Kandidat dobi 1 točko, če pravilno zapiše vsaj tri izmed šestih zahtevanih nizov ali če zapiše, da je takih nizov šest.
Skupaj	4		

Rešitev Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
10	2	♦ zapis ali upoštevanje kombinacij reda 5 izmed 12 elementov	
	1	♦ izračun: 792	
	1	♦ odgovor, npr.: Trener lahko izbere začetno peterko na 792 načinov.	
Skupaj	4		

Rešitev Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
11	1	♦ uporaba pravila produkta	
	2	♦ izračun, npr.: $n = 5 \cdot 3 \cdot 7 = 105$	1 + 1
	1	♦ odgovor, npr.: Ustvarimo lahko 105 akcijskih junakov.	
Skupaj	4		

Rešitev	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
---------	-------	---------	------------------

Naloga			
12.1	2	♦ izračun števila fantov, ki se v šolo vozijo z avtobusom, npr.: $40\% \text{ od } 10 = 4$ (fantje)	1 + 1
	2	♦ izračun števila deklet, ki se v šolo vozijo z avtobusom, npr.: $4 + 5 = 9$ (deklet)	1* + 1
Skupaj	4		

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
12.2	4	♦ izračun, npr.: $27 \cdot 26 \cdot 25 = 17550$	1 + 1 + 1 + 1
	1	♦ odgovor, npr.: Vseh možnih izborov je 17550 .	
Skupaj	5		

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
12.3	2	♦ izračun ugodnih izidov, npr.: $m = \binom{5}{2} = 10$	1 + 1
	2	♦ izračun vseh izidov, npr.: $n = \binom{27}{2} = 351$	1 + 1
	2	♦ izračun verjetnosti, da oba izbrana dijaka nista imela domače naloge, npr.: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{351} \doteq 0,0285$	1* + 1
Skupaj	6		

Rešitev Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
13	2	♦ zapis ali upoštevanje formule za izračun števila kombinacij, npr.: $\binom{15}{2} = 105$	1 + 1
	2	♦ zapis ali upoštevanje formule za izračun verjetnosti, npr.: $P(A) = \frac{1}{105} \doteq 0,0095$	1 + 1
Skupaj	4		

Rešitev Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
14	2	♦ ugotovitev, da je število ugodnih možnosti $m = 5$ in da je število vseh možnosti $n = 15$	1 + 1
	1	♦ izračun, npr.: $P(A) = \frac{5}{15} \doteq 0,333$	
	1	♦ ugotovitev, da mora biti v posodi B enako število rdečih in zelenih kroglic	
	1	♦ rešitev, npr.: 5 zelenih kroglic	
Skupaj	5		

Rešitev Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila

15.1	2	♦ ugotovitev ali upoštevanje, da sta trikotnika ABV in DCV podobna in enakokraka	1 + 1
	1	♦ ugotovitev ali upoštevanje ustreznih razmerij v podobnih trikotnikih	
	1	♦ zapis, npr.: $60 : 160 = \frac{ AB }{2} : 240$	
	1	♦ rešitev, npr.: $ AB = 180$ cm	
	1	♦ upoštevanje, da je npr. trikotnik ANV pravokoten	
	1	♦ zapis, npr.: $\tan \alpha = \frac{240}{90}$	
	1	♦ rešitev, npr.: $\alpha \doteq 69,44^\circ$	
Skupaj	8		

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
15.2	2	♦ izračun ploščine mize, npr.: $S_m = 1,2^2 = 1,44$ m ²	1 + 1
	2	♦ izračun ploščine prta, npr.: $S_p = \pi \cdot 0,2^2 \doteq 0,126$ m ²	1 + 1
	1	♦ rešitev, npr.: $\frac{0,126}{1,44} = 0,0875 = 8,75$ %	
Skupaj	5		

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
15.3	2	♦ uporaba formule za izračun števila kombinacij, npr.: $\frac{5}{2} = 10$	1 + 1
Skupaj	2		

Rešitev Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
16	1	♦ zapis ali uporaba števila ugodnih možnosti poskusa, npr.: $m = 1$	
	2	♦ izračun števila vseh možnosti poskusa, npr.: $n = \binom{5}{3} = 10$	1 + 1
	1	♦ izračun verjetnosti, npr.: $P(A) = 0,1$	
Skupaj	4		

Rešitev Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
17.1	1	♦ izračun števila deklet v 2. A razredu, npr.: $d = 8$	
	1*	♦ zapis razmerja, npr.: $2 : 5 = 8 : f$	
	2	♦ izračun števila fantov v 2. A razredu, npr.: $f = \frac{5 \cdot 8}{2} = 20$	1* + 1
	1	♦ odgovor, npr.: V 2. A razredu je 8 deklet in 20 fantov.	

Skupaj	5	
---------------	----------	--

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
17.2	4	♦ izračun, npr.: $P = \frac{\binom{12}{2} \binom{16}{1}}{\binom{28}{3}} \doteq 0,32$	1 + 1 + 1 + 1
	1	♦ odgovor, npr.: Verjetnost, da je učitelj matematike za spraševanje izbral 2 fanta in 1 dekle, je približno 0,32.	
Skupaj	5		